ОБОБЩЕННЫЕ РАВНОВЕСИЯ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ

Коннов Игорь Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Казанского государственного университета и ведущий научный сотрудник Института проблем информатики АН РТ. Автор более 135 научных работ, в том числе двух монографий и одного учебника, опубликованных в международных и российских изданиях. Заместитель председателя научного совета АН РТ «Математическое моделирование экономических систем», член Американского и Казанского математических обществ, координатор международной рабочей группы «Равновесные модели в сложных системах».

В предлагаемой вашему вниманию работе рассматривается расширенное понятие равновесия в системе и связанное с ним понятие вариационного неравенства. Для определения состояния системы формулируется равновесный подход. На разнообразных, но достаточно простых примерах приложений показывается, что данные понятия могут служить весьма эффективным инструментом для решения сложных задач, возникающих в социально-экономических системах.

Понятие равновесия имеет вполне очевидный для интуитивного понимания смысл, который к тому же легко определяется в терминах, скажем, механики: «Чтобы тело, воспринимаемое как материальная точка, находилось в равновесии, равнодействующая всех приложенных к нему сил должна равняться нулю». Такое определение, помимо достоинств, имеет и очевидный недостаток в том смысле, что в более сложных системах то же самое понятие может формулироваться иначе, а традиционное упрощенное понимание только препятствует его применению для исследования и анализа возникающих в этих областях задач. В результате аппарат специалистов, занимающихся реальными прикладными задачами, оказывается (или остается) значительно обедненным.

Следует подчеркнуть, что автор вовсе не ставит своей целью дать как можно более точное определение каким-либо понятиям. Основная задача данной статьи состоит в том, чтобы показать, что расширение традиционно принятого понятия равновесия и тесно связанного с ним вариационного неравенства позволит успешно применять их для решения многих новых сложных и достаточно актуальных задач. В качестве иллюстрации выбраны главным образом социально-экономические приложения. Действительно, в данных областях невозможно строить натурные модели и проводить эксперименты, как в физике, химии и других естественных науках, и ценность нового инструментария исследований еще более возрастает. Автор стремился к максимальной простоте изложения, в результате пришлось пожертвовать где-то математической строгостью, а где-то упростить или даже отказаться от включения класса моделей, если исходный вариант требует углубленных специальных знаний.

Для обобщения понятия равновесия можно использовать само свойство *существования исследуемой системы как целого*. Обычно состояние системы определяется набором значений характеристик или параметров. Если эти значения находятся в диапазонах, обеспечивающих длительное функционирование данной системы, то у нас есть все основания считать, что система находится в состоянии равновесия. Таким образом, это состояние может быть как статическим, так и динамическим, т.е. представлять (равновесную) траекторию движения системы. Чтобы отличать от обычных понятий, такие состояния (или траектории состояний) можно в принципе назвать обобщенными равновесиями.

Опираясь на таким образом определенное понятие равновесия, можно сформулировать *равновесный подход* к исследованию различных сложных систем, функционирующих в течение достаточно длительного периода времени. Этот подход будет состоять в том, чтобы определить задачу обобщенного равновесия для такой системы в виде математической модели. Тогда можно ставить вопрос об условиях существования решения полученной задачи, которые будут указывать и условия стабильного существования самой системы, а найденное решение задачи будет указывать состояния, в которых система будет находиться, т.е. позволит прогнозировать поведение системы. Кроме того, можно будет идентифицировать текущие состояния системы по отношению к состоянию равновесия и выбирать управляющие воздействия для корректировки текущего состояния. Итак, проблема состоит в формулировке задачи обобщенного равновесия в виде математической модели.

В качестве примера соотношений между обычным и обобщенным равновесием можно привести теорию экономического равновесия. Отталкиваясь от обычного понятия равновесия в механике, швейцарский экономист Л. Вальрас [1] предложил модель равновесия в экономике, в основу которой было положено равенство спроса и предложения по всем видам товаров. А именно, если в рыночной экономике присутствуют n видов товаров, то предполагается, что для любого заданного вектора цен $p=(p_1,\ldots,p_n)$ с неотрицательными компонентами продавцы и потребители в состоянии определить свой суммарный спрос $D_i(p)$ и суммарное предложение $S_i(p)$ по каждому i-му товару, $i=1,2,\ldots,n$. В результате состояние равновесия по Вальрасу в экономике определяют цены $p^*\geq 0$ такие, что

$$D_i(p^*)=S_i(p^*) \quad \text{для всех} \quad i=1,\ldots,n. \tag{1}$$

Таким образом, чтобы найти состояние равновесия, надо решить систему уравнений (1), а вопрос о существовании такого состояния определяется на основе результатов теории нелинейных уравнений.

Этот подход к моделированию экономических систем получил значительное развитие в XX веке, особенно после доказательства существования равновесных цен для весьма общей математической модели рыночной экономики, полученного К.Дж. Эрроу и Ж. Дебре (см., например, [2]). Однако многочисленные попытки сделать данный подход, опирающийся на решение задач вида (1), универсальным и чуть ли не единственным инструментом исследования в экономике встретили значительные затруднения при моделировании реальных экономических систем, не говоря уже о возражениях как экономистов (например, кейнсианцев, институционалистов и др.), так и математиков. Следовательно, возникает проблема, с одной стороны, обобщения такого понятия равновесия, а с другой стороны, более четкого очерчивания круга задач, которые могут быть решены на основе равновесного подхода (см., например, [3]). В качестве общей математической модели для различных видов равновесий оказалось весьма удобным использовать *вариационное неравенство*.

Например, отрицательные решения системы (1) заведомо не имеют смысла, а система

$$p^*\geq 0, \quad D(p^*)=S(p^*)$$

может оказаться несовместной при весьма естественных условиях. Поэтому на самом деле вместо (1) было предложено решать систему

$$p_i^*\geq 0, \quad E_i(p^*)\leq 0, \quad p_i^*E_i(p^*)=0 \quad \text{для} \quad i=1,\ldots,n, \tag{2}$$

где $E_i(p)=D_i(p)-S_i(p)$ – избыточный спрос на i-й товар при ценах p. Условия равновесия (2) определяются принципом дополнительности: при положительной цене p_i^* спрос на i-й товар равен предложению, т.е. $E_i(p^*)=0$, а при несовпадении спроса и предложения на i-й товар равновесная цена на него нулевая. Кроме того, добавлены условия неотрицательности цен и неположительности избыточного спроса. Задача (2), называемая *задачей дополнительности*, представляет собой естественное обобщение системы (1), но ее решение, а значит, равновесие, существует при гораздо более общих условиях. В свою очередь, известно, что задача (2) эквивалентно переписывается в виде: найти вектор $p^* \geq 0$ такой, что

$$\left\langle -E(p^*), p - p^* \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} E_i(p^*)(p_i^* - p_i) \geq 0, \qquad \forall p \geq 0. \tag{3}$$

Задача (3) представляет собой частный случай формулировки вариационного неравенства. Поскольку данная формулировка будет играть ключевую роль, рассмотрим ее подробнее.

Сам термин «вариационное неравенство» появился в математической физике в середине 60-х годов XX века и рассматривался как естественное обобщение вариационного принципа (см., например, [4, 5]). При этом следует отметить, что постановки задач механики, в точности являющиеся вариационными неравенствами, такие, как принцип виртуальных перемещений, появились еще в работах И. Бернулли и Ж.Б. Фурье. Как известно, вариационные принципы состоят в формулировке того или иного закона (свойства) в виде задачи на экстремум некоторого функционала, например, принцип Гамильтона для механических систем, и являются весьма популярным инструментом исследования во многих областях физики, в то время как появление вариационных неравенств было вызвано необходимостью учета различного рода ограничений в подобных задачах. Об успешности применения нового инструмента в математической физике за сравнительно небольшой период времени можно судить хотя бы по монографиям [4] и [6, 7].

Дадим формальную постановку вариационного неравенства, для упрощения в конечномерном пространстве. Пусть задано некоторым образом множество точек X в n-мерном пространстве R^n, а также отображение F множества X в R^n, т.е. для любой точки $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ определен вектор $F(x) \in R^n$. Тогда можно определить вариационное неравенство как задачу нахождения точки $x \in X$ такой, что

$$\left\langle F(x^*), x - x^* \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} F_i(x^*)(x_i - x_i^*) \geq 0, \quad \forall x \in X. \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что задача (3) есть частный случай задачи (4), где $F(x) = -E(x)$, а допустимое множество X есть неотрицательный ортант $R_+^n = \left\{ x \in R^n \mid x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, n \right\}$. Кроме того, в случае $X = R^n$ задача (4) превращается в *систему уравнений*

$$F_i(x^*) = 0 \quad i = 1, \ldots, n$$

(ср. с (1)). Можно установить связь вариационного неравенства и с другими, более общими задачами. Например, если известно некоторое отображение T множества X в себя, то можно определить *задачу о неподвижной точке*

$$x^* = T(x^*),$$

которая является одним из основных объектов исследования в нелинейном анализе. Между тем эта задача также является частным случаем задачи (4) при $F(x) = x - T(x)$, причем в (4) на образы отображения F не накладывается очень жесткое условие их принадлежности множеству $x - X$, в результате вариационное неравенство является более удобным для приложений.

Теперь обратимся к *задаче оптимизации*, которую определим как задачу нахождения точки $x^* \in X$, доставляющей наименьшее значение некоторой функции φ, заданной на множестве X, или, в более краткой записи,

$$\min_{x \in X} \to \varphi(x). \tag{5}$$

Этим задачам, называемым также задачами математического программирования, посвящено огромное количество работ; см., например, [8] и приведенную библиографию. Предположим для упрощения, что функция φ дифференцируемая, тогда любое решение задачи (5) является и решением задачи (4), если $F(x)$ есть градиент функции φ, т.е. $F(x) = \nabla\varphi(x)$. В этом случае отображение F называется потенциальным или интегрируемым. Когда функция φ обладает свойством выпуклости, то справедливо и обратное утверждение, т.е. задачи (5) и (4) с $F(x) = \nabla\varphi(x)$ становятся эквивалентными.

Это свойство явилось основанием для многих исследователей считать вариационное неравенство лишь необходимым и достаточным условием оптимальности в задаче оптимизации, тем более что таковыми были многие первые приложения вариационных неравенств в математической физике.

Однако основную часть известных приложений вариационных неравенств вида (4) составляют как раз задачи, в которых основное отображение F не может быть градиентом никакой функции, т.е. является неинтегрируемым. Для выяснения различий попробуем явно определить это свойство. Например, если $F(x) = \nabla\varphi(x)$ для некоторой функции φ и F – непрерывно дифференцируемое отображение, то его якобиан $\nabla F(x)$ есть матрица вторых производных $\nabla^2\varphi(x)$ функции φ, которая обязательно симметрична. Поэтому несимметричность якобиана $\nabla F(x)$ показывает неинтегрируемость F, т.е. $F(x) \neq \nabla\varphi(x)$ для какой угодно функции φ. Например, таковым является, как правило, отображение избыточного спроса $E(p)$ в задачах экономического равновесия (3) (или (4)) (см., например, [2]). Дело здесь даже не в том, что несимметричных матриц больше, чем симметричных, а в том, что задача (4) позволяет моделировать принципиально новые типы систем, отличающихся от тех, где используются модели вида (5).

Для пояснения этого утверждения рассмотрим ставшую уже классической *задачу объемного планирования*, формулируемую как задачу максимизации стоимости выпускаемых в некотором периоде времени изделий при ограничениях на запасы используемых для их производства ресурсов. А именно, пусть предприятием в данный период времени может производиться n видов изделий и для этого им используется m видов ресурсов, причем цена единицы j-го товара – c_j, запас i-го вида ресурса – b_i, норма расхода i-го ресурса на производство единицы j-го товара – a_{ij}. Пусть x_j обозначает количество выпускаемого товара j-го вида. Тогда сформулированную задачу можно кратко записать в виде

$$\max \rightarrow \{\langle c, x\rangle \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}, \tag{6}$$

где $c = (c_1, \ldots, c_n)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_m)$, матрица $A = (a_{ij})$ имеет размеры $m \times n$. Очевидно, что задача (6) есть частный случай задачи оптимизации (5) с $\varphi(x) = -\langle c, x\rangle$, $X = \{x \in R^n \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$, и является известной задачей линейного программирования в стандартной форме, свойства которой достаточно хорошо изучены (см., например, [8]).

Заметим, что в задаче (6) наиболее существенным является предположение о неизменности коэффициентов c_j, b_i и a_{ij} в течение заданного периода времени. Иначе говоря, при построении модели предполагается, что выбор тех или иных управляющих воздействий не приведет к изменению самой системы, т.е. в ней отсутствуют какие-либо активные элементы (подсистемы), могущие вызвать такие изменения. Именно такие системы (их можно назвать техническими) моделируются с помощью оптимизационных задач. Ключевое предположение о неизменности самой системы по отношению к управляющим воздействиям, очевидно, намного сужает область применения подобных моделей, несмотря на их огромную популярность. В то же время, если в рассмотренной модели продажа товаров осуществляется в условиях рынка, то естественно предположить, что цены c_j будут меняться в зависимости от вектора выпусков, т.е. $c = c(x)$. В итоге состояние равновесия в такой системе определяет точка $x^* \in X$ такая, что

6. Э-768

$$\left\langle c(x^*), x^* \right\rangle \geq \left\langle c(x^*), x \right\rangle \quad \text{для всех} \quad x \in X,$$

но эта задача есть частный случай вариационного неравенства (4) с $F(x) = -c(x)$. Можно рассмотреть и более общий случай зависимости и других коэффициентов от параметров. Но очевидно, что уже полученная задача не принадлежит к классу обычных задач оптимизации и требует привлечения принципиально иных средств для исследования и нахождения решения. Итак, вариационные неравенства позволяют моделировать весьма общие системы, которые могут меняться сами в зависимости от управляющих воздействий.

Другой, достаточно известный класс задач, где весьма успешно применяются вариационные неравенства, составляют *игровые задачи*, моделирующие различные виды конфликтных ситуаций. В частности, для задания бескоалиционной игры *n* лиц достаточно определить для каждого *i*-го игрока множество стратегий X_i и платежную функцию f_i, которая ставит в соответствие любой точке (ситуации) $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n$ число $f_i(x)$ – величину платежа *i*-го игрока в ситуации *x*. Согласно принципу равновесия Дж. Нэша [9], в качестве решения принимается ситуация $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, для которой $f_i(x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*) \geq f_i(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ для любого $x_i \in X_i$ и всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Однако эта задача, с иным подходом к определению равновесия, также сводится к вариационному неравенству при достаточно стандартном предположении о выпуклости каждой функции f_i по переменной x_i.

Проиллюстрируем это утверждение на примере *задачи об очистке промышленных стоков*. В этой модели *n* предприятий сбрасывают свои промышленные стоки в коллектор для очистки, причем сброс *i*-м предприятием стоков в объеме x_i обеспечивает ему выпуск продукции, приносящей доход $c_i(x_i)$. Плата за очистку воды зависит от общего объема промышленных стоков, который равен $\sigma_x = \sum_{i=1}^{n} x_i$, а именно, определяется функцией стоимости очистки кубометра воды $p(\sigma_x)$. Тогда *i*-е предприятие за объем стоков x_i платит величину $x_i p(\sigma_x)$. Таким образом, равновесные величины промышленных стоков $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ будут определяться решением игры *n* участников, где платежная функция *i*-го участника

$$f_i(x) = x_i p(\sigma_x) - c_i(x_i)$$

для $i = 1, 2, \ldots, n$. Предполагая для упрощения, что функции c_i и *p* дифференцируемы, стандартным образом (см. [10], а также [11, с.22]) получаем, что данная задача игрового равновесия эквивалентна вариационному неравенству (4), где $X = R_+^n$ и

$$F_i(x) = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i} = p(\sigma_x) + x_i p'(\sigma_x) - c_i'(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Решение этой задачи позволит оценить объемы промышленных стоков для предприятий, а также оптимальную величину платы за очистку воды. Отметим, что уже для достаточно простых зависимостей c_i и *p* отображение *F*, определенное в (7), не является градиентом никакой функции. Аналогичную структуру имеют и другие задачи *коллективного использования ресурсов*, а также задачи *рыночного равновесия в условиях несовершенной конкуренции* (см. [12]).

Сравнительно новыми классами приложений вариационных неравенств являются модели систем распределенной структуры, учитывающие пространственное расположение элементов. К ним относятся статические и динамические *модели пространственного экономического равновесия*, которые используются для оценки распределения межрегиональных товарных потоков и прогнозирования цен, *модели транспортного равновесия,* которые используются *для прогнозирования и оценки распределения потоков транспорта, величины загрязнения воздуха вдоль магистралей, распределения загрузки линий и оптимальных маршрутов передачи сообщений в различных системах связи, телекоммуникационных и компьютерных сетях* (см., например, [13] – [16]).

В качестве примера таких приложений опишем равновесную модель миграции населения, следуя [15]. В модели присутствуют m пунктов (городов, регионов), между которыми осуществляется взаимная миграция, при этом в течение рассматриваемого отрезка времени повторная миграция (реэмиграция) не считается вероятной. Для каждого i-го пункта b_i и z_i обозначают соответственно начальное и текущее количество населения в этом пункте, ценность (полезность) пребывания в i-м пункте обозначается через u_i, при этом $u_i = u_i(z)$, где $z = (z_1, \ldots, z_m)$, т.е. полезность зависит от количества населения. Для каждой пары пунктов (i, j) определяются величина потока миграции s_{ij} и затраты c_{ij} на переезд одного человека от i-го пункта к j-му, при этом $c_{ij} = c_{ij}(s)$, где $s = (s_{11}, \ldots, s_{mm})$. Иначе говоря, затраты на миграцию могут зависеть от величин миграции между пунктами. Допустимыми будут считаться векторы (z, s) распределения и миграции такие, что

$$s_{ij} \ge 0 \quad \text{для} \quad i, j = 1, \ldots, m; \qquad \sum_{j \ne i} s_{ij} \le b_i \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, m;$$
$$z_i = b_i + \sum_{j \ne i} s_{ji} - \sum_{j \ne i} s_{ij} \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, m. \tag{8}$$

Иначе говоря, величина потока миграции неотрицательна, общая величина миграции из пункта не может превосходить начальное количество населения там, выполняется условие баланса между текущим и начальным количеством с учетом иммиграции и эмиграции. Условия равновесия в этом случае определяют допустимую пару (z^*, s^*) векторов таких, что

$$u_i(z^*) - u_j(z^*) + c_{ij}(s^*) + \mu_i \begin{cases} = 0, & \text{если} \quad s_{ij}^* > 0, \\ \ge 0, & \text{если} \quad s_{ij}^* = 0; \end{cases} \tag{9}$$

для всех $i, j = 1, \ldots, m$; где $\mu_i \ge 0$, если $\sum_{k \ne i} s_{ik}^* = b_i$ и $\mu_i = 0$, если $\sum_{k \ne i} s_{ik}^* < b_i$ для всех $i = 1, \ldots, m$. Таким образом, если в i-м пункте в состоянии равновесия величина эмиграции меньше начального количества населения, то соотношения (9) определяют, что разность полезностей в ином и данном пункте не больше затрат на переезд одного человека и совпадает с ними при положительной величине эмиграции. Если же величина эмиграции из пункта совпадает с начальным количеством населения в этом пункте, то к затратам на перевозку добавляются неотрицательные оценки ограничения. Несмотря на кажущуюся сложность, условия (9) переписываются в виде: найти допустимую пару векторов (z^*, s^*) таких, что

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}(s^*)(s_{ij} - s_{ij}^*) + \sum_{i=1}^{m} u_i(z^*)(z_i^* - z_i) \ge 0 \tag{10}$$

для всех векторов (z, s), удовлетворяющих соотношениям (8). В результате получена задача (10), которая также является специальным случаем вариационного неравенства (4). В модели можно учесть дифференциацию населения по группам, что также отражается лишь на ее размерности.

Осознание того факта, что вариационные неравенства представляют новый общий класс задач, позволяющий адекватно моделировать и эффективно решать многие сложные прикладные задачи, привлекло к ним повышенное внимание многих исследователей. В результате за сравнительно короткий срок удалось достичь значительного продвижения как в теории, так и в разработке новых численных методов. Об этом свидетельствуют вышедшие недавно монографии [11], [15], [17], [18]. В этих книгах содержится также описание многочисленных обобщений и подклассов вариационных неравенств.

Таким образом, многие задачи, возникающие при исследовании достаточно сложных систем различной природы, могут быть успешно исследованы с помощью единого аппарата, развитого для вариационных неравенств. Специфические особенности каждого конкретного класса задач не являются здесь помехой, а лишь требуют надлежащего их учета.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда НИОКР Академии наук РТ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Walras L.* Eléments d'économie politique pure. – Lausanne: Corbaz, 1874.

2. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. – М.: Мир, 1972.

3. *Коннов И.В.* Модели равновесного типа в экономике: от уравнений к вариационным неравенствам//Исслед. по информатике. – Казань, 2002. – Вып.4. – С.67-76.

4. *Киндерлерер Д., Стампаккья Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. – М.: Мир, 1983.

5. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980.

6. *Лапин А.В.* Сеточные аппроксимации вариационных неравенств. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984.

7. *Байокки К., Капело А.* Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложение к задачам со свободной границей. – М.: Наука, 1988.

8. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. – М.:Наука,1983.

9. *Nash J.* Non-cooperative games/Annals of Mathematics. – 1951. – V.54, № 2. – P.286–295.

10. *Rosen J.B.* Existence and uniqueness of equilibrium points for concave n- person games // Econometrica. – 1965. – V.33, № 3. – P.520–534.

11. *Коннов И.В.* Методы решения конечномерных вариационных неравенств. – Казань: Изд-во «ДАС», 1998.

12. *Okuguchi K., Szidarovsky F.* The theory of oligopoly with multi-product firms. – Berlin: Springer-Verlag, 1990.

13. *Берщанский Я.М., Мееров М.В.* Теория и методы решения задач дополнительности // Автомат. и телемех. – 1983. – № 6. – С.5–31.

14. *Harker P.T., Editor.* Spatial price equilibrium: Advances in theory, computation and application. – Berlin: Springer-Verlag, 1985.

15. *Nagurney A.* Network economics: A variational inequality approach. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.

16. *Коннов И.В.* Об одном подходе к решению задач транспортного равновесия//Исслед. по информатике.– Казань, 2000.–Вып.2.– С.125–131.

17. *Konnov I.V.* Combined relaxation methods for variational inequalities. – Berlin : Springer-Verlag, 2001.

18. *Facchinei F., Pang J.-S.* Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems. Vols. I, II. – Berlin: Springer-Verlag, 2003.