

О ПРЕДМЕТЕ МАТЕМАТИКИ В РЕАЛЬНОМ МИРЕ

Т.К. СИРАЗЕТДИНОВ,

академик АН РТ

1. Характерные особенности математической науки

Все естественные науки, как механика, астрономия, геология и т.д., имеют свой предмет исследования в объективно существующем внешнем мире. Механика изучает движение материальных тел. Астрономия – звезды, планеты, их расположения, перемещения и другие свойства. Так что каждая естественная наука имеет дело с определенными телами, веществами и их свойствами, которые можно указать и увидеть независимо от нашего сознания в существующем мире. Можно ли сказать то же самое в отношении чистой математики или математики вообще. Обзор и анализ исследований по математике как науки оставляют такое первое впечатление, что математика не имеет своего предмета в объективной реальности, она рождается и создается только в голове математика по его желанию и никакого отношения к внешнему миру не имеет. Но в то же время математические результаты оказываются универсальными, применимыми к изучению, описанию и прогнозированию поведения реальных явлений, процессов, причем независимо от различия их физического содержания и природы. С одной стороны, часто утверждают, что математика с реальностью связана только в историческом плане, а на современном этапе развития как будто оторвана от непосредственных материальных объектов, с другой стороны, своими подходами, методами как инструмент она позволяет проникнуть в глубочайшие тайны природы, раскрыть и понять их, предсказывать свойства объектов и прогнозировать явления. В то же время математические доказательства и результаты не нуждаются в экспериментальной проверке и проведении опытов. Они не зависят от обстоятельств, течения реальных процессов, являются абсолютными, неизменными, экспериментально или как-то по-другому непроверяемыми, не поддающимися изменению или порче годами и тысячами лет. То, что было доказано строго однажды, не нуждается в повторном доказательстве, т.е. они универсальны. Некоторые древние философы, которые искали твердую почву для науки и жизни, истину видели в числах, в математике на том основании, что математические утверждения неизменны, абсолютны в отличие от материального, окружающего нас мира, где все течет, все меняется.

Математика, ее методы оказывали и оказывают огромное влияние также и на другие науки. Это влияние ощущается даже в тех областях науки, где математический аппарат до сих пор как инструмент не используется. Таким образом, математические утверждения, кажущиеся выдумками самих людей, являются весьма практическими. Без теории комплексных переменных и дифференциальных уравнений и ряда других весьма абстрактных разделов математики нельзя было создать современную теоретическую механику, аэродинамику, динамику полета, теорию электромагнитных полей, квантовую механику и т.д. и современные инженерные объекты и, следовательно, промышленность. Заметим также, когда определенные направления математики начинают отрываться от практики, от жизни, всегда они начинают блекнуть; разделы математики, которые не находят приложения, постепенно хиреют, забываются, часто приходят в тупик. Бурно развиваются те направления в математике, которые находят практические приложения, служат потребностям других наук и техники. Но известно также, что по чисто формальной логике, выбирая правила, можно строго доказать противоречивые утверждения, т.е. создается впечатление, что при формальной постановке задачи строго математически можно доказать что угодно при тех же исходных посылах. В какой степени математика является чисто абстрактной наукой, не имеющей своего предмета исследования в реальном мире и связанной с практикой и жизнью только в период ее зарождения; а ее доказательства не нуждались и не нуждаются в ссылке материальному внешнему миру, каким-либо его свойствам и при этом не используются какие-то его свойства, отношения, разве только для обозначения математических знаков и символов? Существует ли неразрывная нить, связь математики с реальным миром, которая незримо управляет мыслью математиков, заставляет их создавать математические знания, отражающие определенные стороны материального мира, учитывающие «логику вещей», и поэтому применимые к изучению, прогнозированию объективной реальности и используемые при создании и развитии современной науки и техники?

2. Постулат существования и абстрактная точка

При познании окружающей среды, реального мира, составляющих частей его (объектов) мы исходим из того факта, что они существуют, их можно изучать, исследовать, использовать. Существование объективной реальности является абсолютной истиной, исходной позицией любой науки. При этом естественные науки дальше изучают природу, содержательную сторону, различные свойства конкретных объектов, а для математики природа явлений и объектов не имеет значения, она полностью абстрагируется от них и из всего этого принимает только факт существования. В самом деле, если абстрагироваться от природы, физики, содержания вещей, объектов, то как факт бытия остается только факт существования. Если в дальнейшем не вникать в сущность объектов и остановиться только на факте существования, то любой из объектов можно представить как бестелесную, бесформенную, бессодержательную точку, которую называют абстрактной или математической точкой.

Первый постулат математики: *существует абстрактная точка.*

Такой результат можно обозначить, как-то отличить, фиксировать любым символом, причем любая вещь, объект будет отмечаться совершенно одинаково, ибо любой из этих объектов, предметов не отличается ничем от других; они не различаются по содержанию, внутренним строением, структурой, формой, расположением, сущностью, т.е. из факта существования не следует их различимость. В этом заключается первая и главная абстракция науки, которую ис-

пользует математика и в этом уже заключается начальная и повседневная связь математики с реальным миром. Математика хотя абстрагируется от конкретных объектов, но исходит из факта их существования, поэтому их объекты и результаты относятся к объективной реальности и отражают ее.

Но, исходя только из одного факта существования абстрактной точки, строить науку нельзя. Так или иначе необходимо заимствовать у реальности еще какие-то ее дополнительные свойства. Рассмотрим, какие еще возможности и свойства объективного мира используются в математике.

3. Универсальное соответствие и единица

Факт существования, возможность введения математической точки не исключает, а наоборот, предполагает существование различных объектов, их изолируемость, отделимость друг от друга. Но единственно при этом мы не обращаем внимания на их внутреннюю сущность, природу. Так что введение понятия абстрактной точки уже предполагает множество таких точек. Что можно делать такими точками? Поскольку они возникли при абстрагировании различных предметов, то, по крайней мере, за определенными точками можно сохранить право, чтобы они носили информацию о том конкретном предмете или объекте, факт существования которого они отмечают, выражают. Например, факт существования дерева отмечаем символом D , т.е. данному дереву, как абстрактной точке символ D . Но этим мы уже ввели и совершили две операции соответствия: во-первых, установили соответствие между реальным объектом-деревом и абстрактной точкой, которую обозначили через D , а при введении этого обозначения установили второе соответствие: между абстракцией дерева и символом D , т.е. абстрактной точкой и символом D .

Если следить за нашей практикой, жизнью, процессом познания, то мы всегда обнаружим последовательность введения и выполнения соответствий между различными объектами, частями реального мира, между ними и их абстракциями различного уровня, обозначениями, символами, знаками, и их идентификации. Установление соответствия между различными предметами одна из главных, постоянно используемых операций в процессе познания объективно существующего мира и в нашей повседневной жизненной практике. Сознательно и неосознанно мы проводим различные соответствия, сопоставления, сравнения и т.д. Это необходимый элемент в процессе познания и используется во всех научных исследованиях. Оно уже используется при введении понятия абстрактной точки, в установлении факта существования, т.е. когда вводится соответствие между точкой и фактом существования. Операция «соответствия» это одна из универсальных операций, которая находит весьма частую реализацию в нашей жизни, практике, познании. Люди и предметы находятся в различных отношениях, и это в первую очередь выражается в установлении соответствия, например, хозяин и его скот, человек и его имя и т.д.

Математику не интересует природа соответствия, содержательная сторона, выделяется только факт существования этого соответствия между данными предметами или операции соответствия, реализуемого в жизни различными путями, способами.

Пусть данному предмету, например, дереву или корове, привели в соответствие один палец (рис.1). Если на соответствующий вопрос человек укажет свой один палец, то другой понимает, что имеется единица предмета. Хотя это есть введение соответствия между предметами, например, деревом и пальцем, но это конкретное, содержательное соответствие, которое используется всеми и во всех науках. Оно еще не относится к математике. В математике не имеет

значения содержательная сторона и конкретная реализация соответствий, поэтому безразлично, между какими объектами устанавливается соответствие и какое это соответствие.

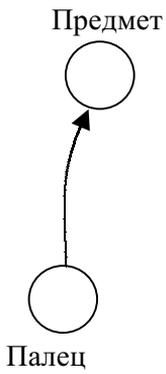


Рис.1

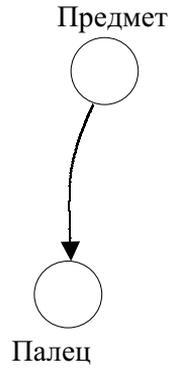


Рис.2

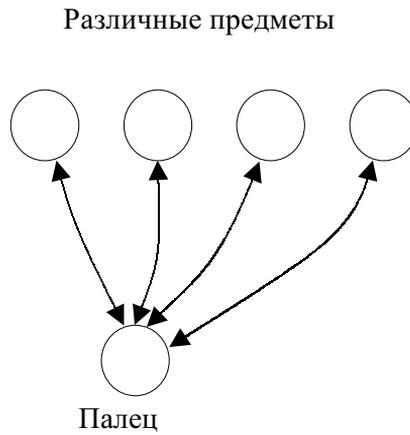


Рис.3

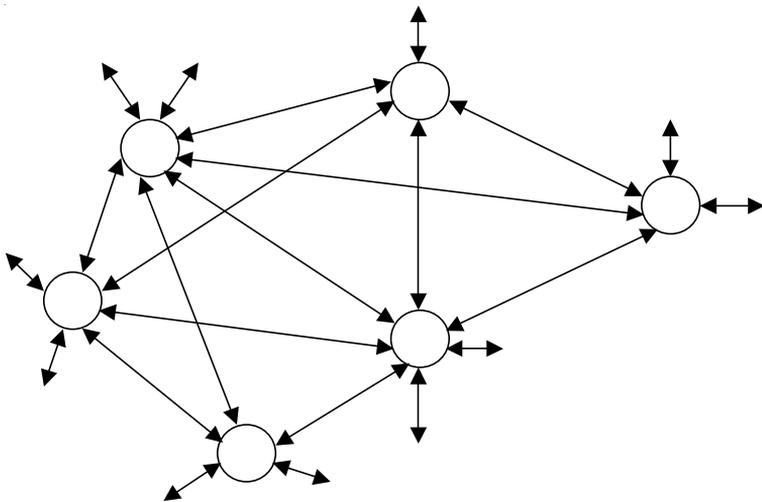


Рис.4

Данному пальцу мы можем привести в соответствие любой предмет. Например, дерево, данное или другое дерево, все деревья по очереди, коровы и птицы и т.д. (рис.2). В то же время каждое соответствие, вообще говоря, обратно, взаимно. Данному дереву можно приводить в соответствие один палец, другому дереву можем привести в соответствие этот же палец и т.д. и наоборот (рис.3).

Уже установление такого соответствия как бы начинает отрываться от конкретного носителя этих соответствий, от предмета, начинается определенная абстракция. Такие же соответствия можно установить не только между данным пальцем и различными предметами, но и между, например, данным деревом и другими предметами и вообще между любыми отдельными предметами. Геометрически это изобразим линиями с двумя стрелками на концах, кончающихся на объектах (рис.4) или просто соединяющими их линиями, которые показывают наличие какого-нибудь взаимно обратного соответствия между каждым из предметов со всеми остальными предметами без конкретизации его содержания.

Для установления и моделирования такого соответствия, вообще говоря, достаточно факта существования этих предметов, т.е. достаточно осуществить их между математическими точками, отражающими факт существования того или иного предмета. При таком рассмотрении соответствия между различными математическими точками уже подход становится достаточно оторванным от конкретных предметов и абстрактным, чтобы факт соответствия изучить как математическую операцию.

Таким образом, мы пришли к выводу: во-первых, выбираем предмет, например, палочку, или его знак и устанавливаем взаимные соответствия между всеми остальными предметами или их абстрактными точками. Во-вторых, выбираем следующий предмет или его абстрактную точку и устанавливаем соответствие между нею и остальными точками (или предметами). В-третьих, выбираем следующую точку и т.д. То есть устанавливается соответствие (или отображение) между всевозможными абстрактными точками.

Такое соответствие может быть установлено между различными математическими точками. Оно носит универсальный характер, назовем его единицей или числом один и обозначим знаком «1».

Таким образом, мы пришли к понятию первого основного числа – единицы, как наиболее общее, универсальное и допустимое между любыми предметами соответствие. Причем это соответствие не обращает внимания на природу объектов и отношения между ними, т.е. представляет совокупность одинарных соответствий между всевозможными абстрактными точками.

Второй постулат математики: *существует универсальное соответствие между абстрактными точками, т.е. единица.*

Так как это соответствие универсальное, то применимо к абстрактному описанию любого соответствия между любыми предметами, независимо от их природы и их взаимоотношений. В этом заключается начальная связь «единицы» и, следовательно, математики с объективной реальностью и в этой связи заложена применимость математических результатов реальным объектом.

Введение понятия единицы, универсальной операции соответствия составляет вторую основную абстракцию природы взаимоотношений, взаимодействий между различными предметами. Важно то, что между предметами можно установить соответствие, отображать друг в друга, а сама природа предметов и отображений при этом не существенна. Из объективной реальности сохранится факт существования соответствия, а от природы этого соответствия абстрагируется. Отсюда следует всеобщность понятия единицы, применимость к любым предметам. Это соответствие универсально, ибо схватывает важное,

общее свойство реального мира и пути его познания, исследования, изучения, отвлекаясь от содержания, т.е. других свойств.

4. Натуральный ряд чисел

Мы ввели понятие числа «один» или «единица» и связь ее с реальным миром. Теперь как возникает понятие числа «два». Проведем следующее рассуждение. Пусть данному предмету, например, правой руке приводится в соответствие некоторый предмет, например, дерево. А другой, левой руке – другой предмет, например, дом. В результате получим пару одинаковых взаимных соответствий (рис.5). Далее начинаем приводить в соответствие правой руке другие предметы, например, другие деревья, а левой руке приводим в соответствие также другие предметы, например, дом, но не приведенные в соответствие с правой рукой; т.е. правой и левой руке приводится в соответствие все больше и больше предметов, но предметы, приведенные в соответствия с правой рукой, не приводятся в соответствие с левой рукой и наоборот. Различаем

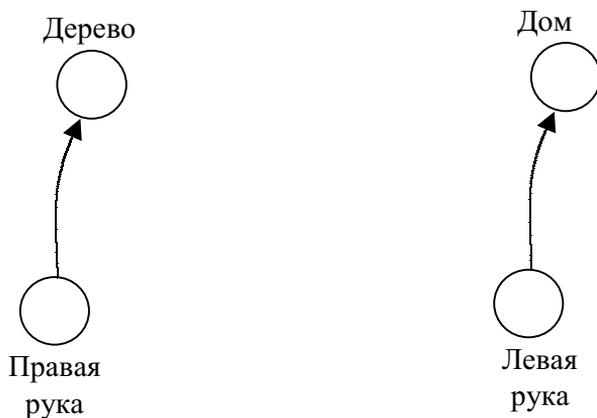


Рис.5

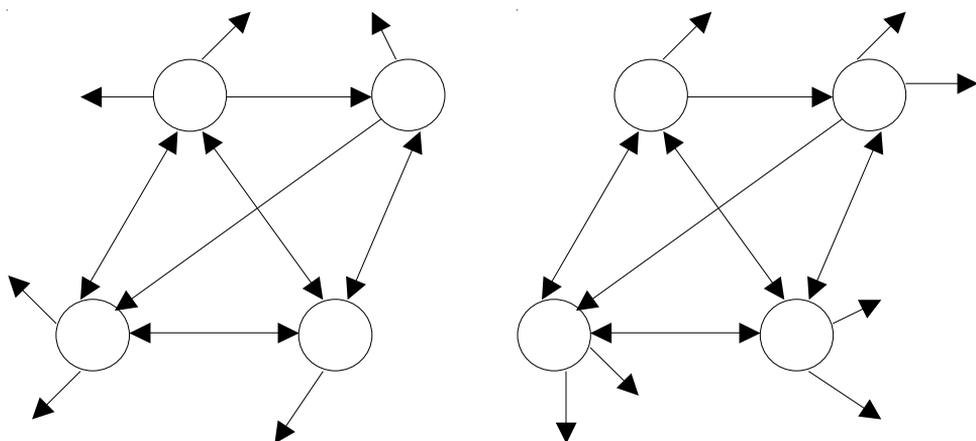


Рис.6

предметы, приводимые в соответствие с правой и левой руками. Продолжая этот процесс, приводим в соответствие в каждой группе, не только с правой или левой руками, но и между всеми предметами в каждой соответствующей группе. При этом теряется различие между предметами внутри каждой группы предметов и соответствий, т.е. абстрагируется содержание предметов и соответствий (рис.6). Каждая группа соответствий представляет универсальное соответствие, т.е. единицу, а в целом это есть парное или двоичное соответствие или число два, которое обозначим знаком «2». Такое парное соответствие разделяет предметы или абстрактные точки на два класса. Здесь природа, сущность предметов и самих соответствий абстрагируется, поэтому такое каждое соответствие всегда можно установить внутри любой совокупности предметов, в чем и заключается всеобщность применения такой операции установления соответствия. Этим отличается свойство предметов быть «два», существования пары, разбиения на два класса. Аналогично устанавливаются последовательно троичные, четверичные и т.д. универсальные соответствия, т.е. числа три, четыре и т.д.

Третий постулат математики: *существуют классы универсальных соответствий между математическими точками, представляющие натуральный ряд чисел 1,2,3,...*

Далее используя свойства универсальных соответствий, вводятся операции сложения, вычитания, умножения, деления между целыми числами, т.е. классами универсальных соответствий, понятия отрицательных и дробных чисел, как результаты расширения операций вычитания и деления, представляющие более сложные соответствия, чем единица, двойка и т.д.

Теперь можно сказать, что арифметика как раздел математики изучает свойства и операции над универсальными соответствиями, которые являются всегда выполнимыми.

Другие соответствия уже не будут столь универсальными, как числа, а несколько уже специфичными. Предметом арифметики являются универсальные соответствия между абстрактными или математическими точками и простые операции над ними, поэтому ее результаты применимы к произвольным реальным объектам. Абстрактная точка отражает факт существования объективных предметов, а универсальное соответствие – факт существования различного рода отношений между различными предметами. Все это гарантирует применимость результатов арифметики к изучению реальных объектов мира, причем только определенных, ограниченных их свойств, которые доступны описанию этими абстракциями. Конкретный содержательный смысл математических точек и операций соответствия при применении их к изучению свойств реальных объектов остается за исследователем, который применяет подход арифметики.

Если абстрагироваться от факта существования математической точки и соответствий как факта связи с реальным миром, как его свойства, то математик потеряет связь с реальным миром и такое развитие математики может привести к противоречивым результатам. Возможность отделения конкретных предметов и изучения реального мира путем установления различных соответствий между ее частями позволяет создать математический аппарат для исследования, познания, прогнозирования и установления связи между прошлым, настоящим и будущим событиями.

Таким образом, математика учитывает основное свойство реального мира – факта существования предметов и соответствий между ними, которые, вообще говоря, используются во всех научных исследованиях и на практике людей. Это дает возможность сделать математику как аппарат, инструмент изучения объективного мира другими науками, хотя математика по существу не является аппаратом, а является наукой, изучающей математические точки, соответствия и их свойства.

5. Взаимное расположение объектов и геометрическая точка

До сих пор мы полностью абстрагировались от формы и природы предметов, кроме факта существования их факта установления соответствий. Следующий всеобщий факт, представляющий абсолютную истину утверждений, – это факт взаимного, относительно друг к другу расположения предметов, их относительная удаленность друг от друга. Абстрагируясь от содержания предметов, но сохраняя кроме факта существования предметов еще возможность их взаимного расположения, взаимной относительной удаленности, придем к понятию геометрической точки.

Четвертый постулат математики: *существует геометрическая точка.*

Геометрия, взаимное расположение объектов или их частей характеризуют форму, но не содержание, природу предметов. Таким образом, введение понятия геометрической точки, которая уже не имеет значения без учета других точек, т.е. без учета взаимной удаленности, расположения математических точек, позволяет изучать форму предметов, различных тел. Этими вопросами занимается геометрия.

6. Материальные и другие физические точки

Дальнейшее важное свойство различных предметов – это изменение взаимных расстояний тел или математических и геометрических точек, т.е. геометрии тел. Это изменение можно изучать без учета взаимного влияния тел и с учетом его. Последний случай относится уже к механике или динамике движения, при этом вводится так называемое понятие инерции движения, массы тел – приходим к понятию *материальной точки*, т.е. точке, обладающей массой.

В электродинамике рассматривается материальная точка, обладающая электромагнитными свойствами и т.д. По аналогии с математикой, геометрической и материальной точками в физике используются различные физические точки и соответственно системы таких точек, которые более подробно учитывают свойства реальных объектов. Но в настоящее время такие системы точек изучаются в соответствующих естественных науках, а предметом математики остается математическая, геометрическая точка, их различные совокупности и соответствия. По мере того, как различные физические и другие точки абстрагируются, свойства их аксиоматизируются, становятся универсальными, и они переходят в предмет математики, хотя и до этого при изучении их применяется математика как аппарат или инструмент для описания их свойств и прогнозирования.